Title	変形理論をめぐる問題 (線型微分方程式の変形理論とアーベル函数論の拡張への新しい視点)
Author(s)	佐藤, 幹夫
Citation	数理解析研究所講究録 (1980), 388: 1-10
Issue Date	1980-06
URL	http://hdl.handle.net/2433/104918
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

数理解析研究所講究録
388巻 1980年 1-10

変形理論をめぐる問題

京大 数理研　佐藤 幹夫

線型微分方程式の変形理論はリーマンの問題提起に始まり、今世紀初め頃に Fuchs 父子, Painlevé, Schlesinger, Garnier らによる重要な展開がなされた。即ちモノドロミー保存的な変形と, "パンルヴェ型" の非線型方程式および超越函数の概念が典型的な場合に確立され, 楕円函数とアーベル函数の理論を超える途が暗示されたのであった。不幸にもこれらの重要な仕事は その誕生後急速に忘れられてしまい, Malmquist, Hukuhara, Okamoto など少数の人々によりひきつがれた以外、最近に至るまで 殆ど顧みられなかった。数理物理学から起った Latta-Myers (1956 − 1965), Barouch-McCoy-Wu (1973 — 1976) による新しい展開については後で述べる。

ここに現れる非線型方程式は, 線型微分方程式系の積分可能條件を記述するものであり、微分幾何学においては古くから扱われていた種類のものである。Gauss-Weingarten

方程式と Gauss-Codazzi 方程式の関係がそれであり、定曲率空間の場合、今日いわゆる Sine-Gordon 方程式を与える。

また、理論物理学では、Onsager (1944) による有名な2次元 Ising 強磁性模型はじめ XY 模型, Dimer 模型等の自由エネルギーの厳密解や, Thirring, Schwinger 等の2次元の場の量子論の模型の厳密解が求められたほか, Bethe によるいわゆる 'Bethe Ansatz' を用いて厳密解の求められるモデルとして, 量子化された1次元非線型 Schrödinger 方程式, Pauling の Ice モデルなど多数が E. Lieb らにより 50 ~ 60年代に知られており、後に研究された Baxter 模型や量子化された Sine gordon 方程式もこのカテゴリーに属する。これらのモデルについての S 行列の厳密解はのちに Zamolodchikov (1976) により求められた。これら、1次元非線型 Schrödinger 方程式や Sine-Gordon 方程式は, いづれものちにソリトン理論あるいは'完全可積分系' の代表的な例となったが、歴史的には'ソリトン性' や'完全可積分性' は これらとは別の方程式, Korteweg de Vries 方程式についてまず確立された。

Zabuski-Kruskal (1963) により Korteweg-deVries (KdV) 方程式の解の'ソリトン性' が発見され, つづいて Gardner-Greene-Kruskal-Miura (1967), Lax (1968) によりこの KdV 方程式が2階線型常微分作用素の'スペクトル保存的'な変形を記述

するものであることが示されたのをきっかけに僅々十　年余の間にこのソリトン理論（或いは完全な積分系の理論）(Zakharov-Faddeev 1971)は爆発的な進展を遂げ、その豊かな内容が解明されて、先駆者らの仕事との関連も明らかにされて来た。（スペクトル保存性と，逆散乱理論 Gelfand-Levitan-Marchenko (1950-1955)，多重ソリトン解と無反射ポテンシャル Kay-Moses (1956)，多重準周期解と可換微分作用素環 Burchnall-Chaundy (1922) およびヤコビ多様体 Baker (1928)-Akhiezer (1961)，戸田格子 Toda (1967)，Henon-Flaschka (1974) .... ）

この様にして我々は線型微分方程式系の変形理論として少しく性質の異った'モノドロミー保存的'と'スペクトル保存的'という二つの重要な理論体系を持つが，当然のこととして、両者は相互に密接に関連している。しかもその関連は次のように二重のいみにおいてである。

第一の関連は直接的なものである。即ち，スペクトル保存的変形理論によって与えられるKdV等の非線型方程式の重要な特殊解，即ち多重ソリトン解はじめ，多重準周期解、あるいは有理解，相似解などすべては，モノドロミー保存的変形を記述する'Schlesinger-Garnier型'の非線型方程式によって特徴づけられる，即ち広い意味での'Painlevé型'

の函数であることである。Flaschka-Newell によれば，このうちで相似解を一般化した多重相似解があるいみで最も一般的な特殊解であり，'Painlevé型'の非線型方程式が逆にスペクトル保存的変形理論の立場から多重相似解として捉えなおされ，また前述の Burchnall-Chaundy, Baker-Akhiezer から，最近の Krichever, Novikov, Manin, Mumford, Tanaka-Date に至る重要な仕事（多重準周期解と Jacobi 多様体の関連）が非アーベル的な場合に拡張されるものと期待されている。なお，相似解とパンルヴェ方程式の関連については，Ablowitz, Segur が先行する。この様な，スペクトル保存変形の方程式と Painlevé 型方程式の関係は最近多くの研究者の関心をよびつつあるテーマである。

第二の関連は，完全可積分系の量子化，とくにその critical limit に関係しており，統計力学における相関函数又は場の量子論における τ 函数（あるいはグリーン函数，あるいは Wightman 函数）の厳密解の計算から生じたものであって，その本質の全貌は未だ謎につつまれている。即ち，Barouch-McCoy-Wu (1973) は，2次元 Ising 模型に関して，2点相関函数の厳密な計算を遂行することに成功し，いわゆるスケール極限において，それが第3種 Painlevé 函数により閉じた形に表わされることを示し得た。Onsager 以後

実に30年ぶりの決定的な結果であった(詳細は, Wu-McCoy-Tracy-Barouch (1976)). そこでは, さきにふれたLatta (1956) – Myers (1965) による次の結果を用いている:

(1) 変形Bessel函数 $K_0(x-y)$ を積分核とする有限区間での一種Fredholm積分方程式は, 確定特異点2コと, 無限遠に1級不確定特異点とをもつ2連立1階の線型常微分方程式系に変換される。

(2) その線型常微分方程式の係数は, はじめに考えた積分区間の長さに依存し, これを変形パラメタとしてある種Painlevé方程式の解になっている。—— というものである。従って, Latta-Myers, Wu et al の仕事の背景には, 彼等自身は自覚していなかったにせよ, 実はモノドロミー保存変形理論がある。(Lattaのみちびいた連立一階方程式は後に見るように実はPainlevé V型に対応するものの特別な場合であり, それはIII型に容易に変換される)。一方, 2次元Ising模型の, このように豊かな性質(Kadanoff-Kohmoto参照)の源泉は, Onsagerによって発見され, Kaufman, Kadanoff, Lieb-Schulz-Mathisらによって発展させられていた自由フェルミ場と二種のスピン場(秩序量と反秩序量)の間の著しい交換関係にある。(Wu et al では, このようなOnsagerらの場の理論的approach (transfer行列の方法, Kramers-Wannier, 久保亮五らによる)の代りに, Montrollらにはじまる直接的appoachを採ったため, この点が幾分不明瞭

である)。なお、このような交換関係は、't Hooftらによれば場の量子論において真空の相転移に関係しており、このことからquarkの閉じ込めにも関係すると考えられている。

Sato-Miwa-Jimbo (1977〜) は、Onsagerの観点と、Wu et alの成果を結びつけて、一般的な理論を作り、その応用として、2次元Ising modelの場合の一般に多点の相関函数もまたモノドロミー保存変形理論によって完全に解かれることを導き、そのほか　　例えばFederbush modelの多点て函数、1次元不透過ボーズ・ガスのn~~粒子~~密度行列(Jimbo-Miwa-Môri-Sato)なども、同様のわくぐみによって厳密に解かれることを示した。最後のものは、量子化された1次元非線型Schrödinger方程式において、coupling constant $=+\infty$ のcritical caseの多点て函数(Green函数)とも言いかえられ、我々の結果はこれがやはりPainlevé型函数に帰着することを示している。(この仕事については、我々は Schultz, Lenard, Vaidya-Tracyらの先行する仕事によって稗益されたところが大きい。Schultz-Lenardでは問題がすでに~~Myers~~ Latta型の積分核をもつ積分方程式にreduceされていた。)　一方、2次元Ising模型に関するWu et al 及び我々の結果も、同様ないみで、量子化されたsine-Gordon方程式において、coupling constant β がcritical value (この場合は $\sqrt{4\pi}$) の

場合に相当するものと多くの人によって信じられている。

これらの例——非線型Schrödinger方程式と不透過ボーズガス，Sine-Gordon方程式とIsing模型のスケール極限——から見れば，スペクトル保存変形理論で扱われる完全積分可能系のうち少くともある種のものは，量子化した模型のτ函数の適当な臨界点における性質がモノドロミー保存変形理論によって記述されること（即ち'Painlevé型'であること）が期待される。これが上で'第2の関連'と呼んだものであるが，しかしながら，その全面的な解明は将来に残された問題である。逆に，Monodromy保存的変形を先に与えて，これを量子化された場のoperatorsで表示する問題は，最近三輪によって（任意の確定及び不確定特異点をもつ極めて一般の場合まで）完全に解かれた。これは重要な進歩であって，今後上記の問題を解決する上に手掛りを与えることが期待されよう。一方，完全可積分系の量子化の問題は，現在Faddeevはじめ，数ケ所で熱心に研究されており，いままでにZamolodchikovのS行列に関する結果を，量子化した逆散乱法にもとづいて再現できること，などが示されているが，τ-函数の計算をするところまでは未だ至っていない。

この第2の流れの中に登場する相関函数あるいはτ函数は，素粒子論に限らず，固体物理，統計力学，乱流の統

計的理論なども含む広い意味の'場の量子論'における基本的な量であり、それは一方では'場のoperators'の積の'真空期待値'として定義され、他方では確率場の立場から確率変数の積の期待値とも解釈される。この二通りの解釈は、場の量子論ではHeisenberg-Pauliの正準形式と、Feynman経路積分による解釈とであり、統計力学では、transfer行列による定式化と、Gibbs流の本来の定式化とがそれである。('τ函数'の名は、Lehmann-Symanzik-Zimmermannによる場の量子論の定式化(1950頃?)に由来し、τは'time ordering'を意味する。我々の現象のcontextでは余り適切とは言えないが、便宜上そのまゝ借用する。)

さて、この'第2の関連'の中に現れた著しい事実の一つに次の事実がある。それは、そこに登場する主役であるところの、相関函数乃至はτ函数は、それ自身がPainlevé函数(またはその一般化、'Painlevé型'の函数)になるのではなく、その対数微分 $d\log\tau$, あるいはτ函数たちの間の比(2次元Ising模型の場合をはじめ、一般にτ函数は幾通りにも導入され得る。その自由度はモノドロミー保存変形問題における'Schlesinger変換'……この自由度に対応し、Soliton理論におけるBäcklund変換の自由度に恰度対応する)がPainlevé(型の)函数になる、という事実である。このことは、τ函数がpole divisor

として，ちょうど楕円函数・アーベル函数に対してテータ函数が果すのと同様の役割をPainlevé型の函数に対して果していることを示す。

最近，神保－三輪－上野により，任意個数の確定および不確定特異点をもった最も一般的な場合についてのモノドロミー保存変形の理論が構成され，さらにτ函数の一般的定義も与えられた。本来のPainlevé函数の場合にそうであった(Painlevé, Okamoto)ように，このような一般の場合にも，変形方程式の解の動く特異点は極のみであり，τ函数は極もふくめて動く特異点を持たないであろうと予想される。

これらすべてが正しいとしても，より重大な問題は，このτ函数がϑ函数のような豊かな性質を内蔵しているだろうか？という事であろう。

いずれにせよ，変形理論においてτ函数という新しい概念が極めて重要な位置にあることは疑いない。

最後に，広田氏の従属変数とτ函数との一致について述べたい。周知の通り，スペクトル保存変形を記述するKdV等の方程式の多重ソリトン解は，指数函数の有理式で与えられ，従って整函数でなく有理型函数である。広田氏の方法は，従属変数の適切な変換によりこれを整函数にみちびく。同じ変換を多重準周期解に行えば，アーベル函数がテータ函数に

変換され，やはり整函数となる。我々の立場から見れば，それは実際τ函数に他ならないことがわかる。即ち、広田氏の方法は，τ函数を新たな従属変数にえらぶものであると一般的に言うことが出来よう。上記神保－三輪－上野によってτ函数の一般的な定義が与えられ，それは或るいみでスペクトル保存変形の方程式にもそのまゝ適用できることが示されている。我々としては，広田氏の方法の意味が漸く今になって少しく理解できたような気がしている。広田氏の先見の明に敬意を表したい。

なお，講演の際，毛織泰子氏によるKdV，MKdV等の広田のbilinear equationについての計算結果に言及し，そのデータにもとづいて，予想を宣べたが，研究集会終了後，同氏との共同の研究でこの予想は肯定的に解決したので，別稿で報告させていただいた。